Problemas de valor omisso e comparação: O que sabem os alunos antes do ensino formal da proporcionalidade directa[1]

Ana Isabel Silvestre
Escola Básica 2,3 Gaspar Correia

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo. Este artigo discute os processos matemáticos e também as dificuldades dos alunos do 6.º ano de escolaridade na resolução problemas que envolvem relações de proporcionalidade directa antes do ensino formal deste conceito. Tendo por base uma perspectiva qualitativa e interpretativa, são analisados os processos de raciocínio de quatro alunos de diferentes níveis de desempenho num conjunto de problemas de valor omisso e de comparação, apresentados num teste e numa entrevista vídeo e áudio gravada. Os resultados mostram uma tendência para usar as estratégias escalares de composição e decomposição na resolução de problemas de valor omisso e a estratégia funcional na resolução de problemas de comparação, representando os dados em colunas. As dificuldades estão relacionadas com o não reconhecimento da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade.

Palavras-chave: Proporcionalidade, Estratégias, Representações, Valor Omisso, Comparação.

Introdução

O raciocínio proporcional é um aspecto fundamental no desenvolvimento matemático do aluno, constituindo, nas últimas três décadas, foco de intensa investigação. A literatura refere a forte influência do raciocínio proporcional no desempenho futuro dos alunos em vários tópicos dos programas de Matemática e de outras ciências (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Post, Behr & Lesh, 1988), sendo reconhecida a dificuldade dos alunos neste aspecto do raciocínio matemático (Bowers, Nickerson & Kenehan, 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005). Além disso, Lesh, Post & Behr (1988) chamam à atenção que nem todas as pessoas que resolvem problemas que envolvem relações de proporcionalidade directa, usam raciocínio proporcional.

O *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), para a Álgebra no 2.º ciclo, tem como objectivos gerais de aprendizagem a compreensão da noção de proporcionalidade directa e o uso de raciocínio proporcional. Este documento também refere que o conceito de proporcionalidade directa tem uma relação estreita com diversos tópi-

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projecto IMLNA – Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CED/65448/2006).

cos matemáticos leccionados nos primeiros anos de escolaridade. Isto é, os alunos dos primeiros anos já trabalham em tarefas matemáticas em que a relação de proporcionalidade directa está presente, de um ou outro modo, antes de a estudarem formalmente.

Parece-nos ser importante conhecer a capacidade que os alunos têm de resolver problemas envolvendo raciocínio proporcional antes de se iniciar o ensino formal deste tópico no 6.º ano de escolaridade. A identificação de uma possível base de conhecimento informal por parte dos alunos será um elemento a ter em conta no modo como se organiza o respectivo ensino. Deste modo, neste artigo, discutimos os processos matemáticos, nomeadamente estratégias e representações que os alunos usam na resolução de problemas de valor omisso e de comparação, bem como as suas dificuldades.

Raciocínio proporcional

É muito vasta a vasta literatura sobre a capacidade de raciocínio proporcional (e.g., Cramer et al., 1993; Heller, Ahlgren, Post, Behr & Lesh,1989; Karplus et al., 1983; Lamon, 1993; Post, Behr & Lesh, 1988; Steinthorsdottir, 2003). Com base nesta literatura Silvestre e Ponte (2009), consideram que a capacidade de raciocínio proporcional envolve: (i) distinguir relações de proporcionalidade directa daquelas que o não são; (ii) compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa; e (iii) resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afectado pelos dados numéricos, contexto e representação. Estes pontos pretendem "operacionalizar" a noção de raciocínio proporcional, isto é, indicar diferentes aspectos que devem ser tidos em consideração no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A relação de proporcionalidade directa

A relação de proporcionalidade directa tem sido investigada segundo três perspectivas principais – que podemos designar de psicológica, matemática e curricular – sendo de notar que todas elas sublinham a sua natureza multiplicativa. A perspectiva psicológica apresentada por Vergnaud (1983) sugere que existe essencialmente uma situação modelo para a relação de proporcionalidade directa, que designa por *modelo do isomorfismo de medidas*. Neste modelo as variáveis permanecem independentes e as transformações que se operam dentro ou entre variáveis mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos (Figura 1).

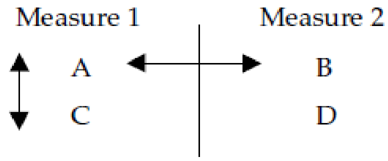


Figura 1: Modelo para as proporções simples (Vergnaud, 1983)

Por sua vez, na perspectiva matemática, a relação proporcionalidade entre duas variáveis quaisquer é formalmente representada como uma igualdade entre duas razões $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (sendo a e c valores de uma variável e b e d valores da outra variável) ou como função linear $y = mx$, com $m \neq 0$.

Finalmente, a perspectiva curricular está fortemente assente no uso de certas representações, levando os alunos a aprender primeiro a resolver problemas utilizando igualdades entre razões e depois recorrendo à função linear. Geralmente, o trabalho com estas duas representações é desenvolvido sem que se estabeleça qualquer relação entre elas. Stanley, McGowan e Hull (2003) argumentam que a abordagem tradicional de ensino para o desenvolvimento do pensamento proporcional, em que os alunos "resolvem proporções" (sic) está ultrapassada e deve ser substituída por outra em que os alunos se envolvem em actividades que os ajudam a descobrir que a proporcionalidade é a variação mútua de duas grandezas.

Tipos de problemas e estratégias de resolução dos alunos

Neste trabalho são usados problemas de valor omisso e problemas de comparação. Os problemas de valor omisso apresentam três valores numéricos e pedem o quarto valor, o "valor omisso" (Cramer & Post, 1993; Lesh, Post & Behr, 1988). Nos problemas de comparação são dados dois ou mais pares de valores numéricos e é pedida a sua comparação. Quando estes problemas são formulados num contexto, isto é, não constituem simples exercícios numéricos, exigem um julgamento qualitativo.

Vários estudos identificam e caracterizam as estratégias usadas pelos alunos para resolver estes problemas. Por exemplo, Post, Behr e Lesh (1988) e Cramer, Post e Currier (1993) identificaram as estratégias: (i) *Razão unitária*, também conhecida por "quanto para um", identificada como a estratégia mais intuitiva atendendo ao facto dos alunos a usarem desde os primeiros anos de escolaridade (cálculo de razões unitárias em problemas de divisão e cálculo de múltiplos da razões unitárias em problemas de multiplicação); (ii) *Factor de mudança* ou *factor escalar* (Hart, 1983), conhecida por "tantas vezes como", estratégia que está condicionada a aspectos numéricos dos problemas mas está presente no reportório de estratégias das crianças; (iii) *Comparação das razões*, associada a problemas de comparação, que permite comparar as razões unitárias através de duas divisões; e (iv) *Algoritmo do produto cruzado*, também conhecida como "*regra de três simples*", que, embora eficiente, é um processo mecânico desprovido de significado no contexto dos problemas. Post, Behr e Lesh (1988) identificaram ainda a estratégia da interpretação gráfica, na medida em que os gráficos podem ser usados para identificar razões equivalentes ou para identificar omissão valor desconhecido em problemas de valor omisso. Uma outra estratégia de cunho mais informal é a *composição/decomposição* (Christou & Philippou, 2002; Hart, 1984), sendo contudo, necessário ter em atenção que esta estratégia não está confinada à utilização de raciocínios multiplicativos.

Pelo seu lado, Lamon (1994) classifica as estratégias de raciocínio como sendo "dentro" e "entre" variáveis, distinguindo entre assim raciocínios de natureza escalar (respeitante a transformações dentro da mesma variável) e funcional (estabelecendo relações entre variáveis). Segundo esta investigadora, a distinção entre estes dois tipos de relação é importante pois envolvem diferentes processos cognitivos.

Metodologia de investigação

Este estudo qualitativo segue uma abordagem interpretativa (Denzin & Lincoln, 1998). Os participantes são quatro alunos do 6.º ano de escolaridade, de 11 anos de idade, duas raparigas (Carolina e Célia) e dois rapazes (António e Manuel), analisados como estudos de caso.

Antes da leccionação do tema da proporcionalidade, todos os alunos das duas turmas a que pertencem os quatro alunos realizaram um teste de diagnóstico sobre o seu domínio deste conceito. Com base no desempenho no teste diagnóstico, foram então escolhidos dois alunos em cada turma, um com um desempenho satisfatório e outro com evidência de dificuldades na resolução dos problemas. Também contribuiu para a escolha destes quatro alunos, a opinião das respectivas professores sobre a sua facilidade em comunicar o modo como pensam. Posteriormente, foram feitas entrevistas semi-estruturadas a estes quatro alunos, gravadas em registo vídeo e áudio. Assim, os dados foram recolhidos no teste diagnóstico e na entrevista aos quatro alunos, durante os quais puderam utilizar a calculadora quando entendessem.

Tendo por base as estratégias de resolução de problemas que envolvem a relação de proporcionalidade directa identificadas na literatura, foi criado um sistema de categorias de análise (ver Quadro 1). Este reportório de estratégias foi complementado por uma estratégia de natureza pictórica cujo uso foi detectado num aluno deste estudo.

Quadro 1 – Quadro de análise das estratégias de resolução de problemas

Nível	Estratégia	Descrição
1	Multiplicativa	Estabelece uma relação multiplicativa entre variáveis. Compreende o significado da razão. Estabelece uma relação co-variação multiplicativa das varáveis.
2	Aditiva e Multi-plicativa	Calcula a razão unitária e mobiliza-a em processos aditivos. Compõe e decompõe números envolvendo as operações de adição, multiplicação e divisão.
3	Aditiva	Compõe números através da adição.
4	Pictórica	Representa pictoricamente objectos ou conjuntos de objectos, procedendo depois à sua contagem.

Neste estudo, atendendo à natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa, consideram-se estratégias proporcionais aquelas que envolvem relações multiplicativas. No entanto, reconhece-se a possibilidade de os alunos resolverem correctamente alguns destes problemas usando estratégias não multiplicativas.

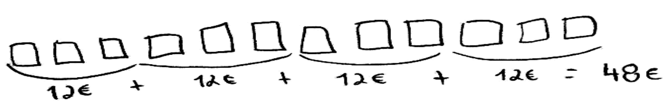
Resultados

Resolução de problemas de valor omisso

O problema 1 tem um contexto simples e os números são múltiplos de 3, sendo as respostas dos alunos apresentadas no quadro 2.

A Margarida comprou 3 livros da colecção "Era uma vez" por 12 euros. Se a Margarida tiver 48 euros, quantos livros pode comprar?

Quadro 2 – Resposta dos alunos ao problema 1 da entrevista.

Aluno	Resposta
Carolina	Cada livro custa 4 € Se 10 livros é 40 € mais 2 (8€) dá 12 livros R: Pode comprar 12 livros.
Célia	9 | 36 18 | 72 36 | 144 **Investigadora:** Como é que pensaste? **Célia:** Multipliquei por 2. É o dobro. **Investigadora:** E agora, o que estás a fazer? **Célia:** Eu acho que assim não vai dar. (...) 48 euros, é aqui. (Aponta para o espaço no papel entre os números 36 e 72.)
António	**António:** 4 euros é 1 livro, né? **Investigadora:** Sim. (O aluno já o tinha calculado o preço unitário na questão 1.1.) **António:** Faço 48 euros a dividir por 4 [euros] de 1 livro. (Calcula mentalmente.) Dá... 40 [euros] é 10 [livros]. 44 [euros] é 11 [livros]. 48 [euros] é 12 [livros]. Dá para comprar 12 livros.
Manuel	**Manuel:** Vou fazer de 3 em 3 [livros] até dar? 

Carolina, António e Manuel respondem correctamente. Carolina calcula a razão unitária mas não utiliza esta relação funcional para determinar o valor omisso, optando pela composição de valores numéricos, respectivamente o décuplo, o dobro e a respectiva soma. Célia desenvolve uma estratégia de composição que envolve o cálculo sucessivo dos dobros dos pares numéricos, o que não lhe permite encontrar o valor omisso. António desenvolve uma estratégia multiplicativa funcional, recorrendo ao preço unitário dos livros, calcula mentalmente o valor omisso (12 livros), partindo de valores de referência (40 euros corresponde a 10 euros). Finalmente, Manuel apresenta uma estratégia que envolve a representação pictórica dos livros e a adição sucessiva do preço de 3 livros até perfazer 48 euros, que corresponde ao valor omisso (12 livros).

Outro problema apresentado no teste de diagnóstico, apresenta um contexto simples e os seus dados envolvem múltiplos de 5, encontrando-se as respostas dos alunos.

Um automóvel leva 30 minutos a percorrer 50 quilómetros. Se permanecer à mesma velocidade, quanto tempo levará a percorrer 125 quilómetros?

Quadro 3 – Resposta dos alunos ao problema 2 (pré-teste)

Aluno	Resposta
Carolina	50 Km - 30 m. 25 Km - 15 m. 50 quilómetros - 30 minutos 100 quilómetros - 60 minutos 125 quilómetros - 75 minutos R: Sim, levará 75 minutos a percorrer 125 minutos
Célia	(minutos quilómetros 75 125 37,5 62,5 18,75 31,25 9,375 15,625 minutos quilómetros 15 25 30 50 60 100 90 150
António	30 m = 50 Km 60 m = 100 Km ~~125 m~~ 75 m = 125 Km 15 m = 25 Km

Manuel	$\begin{array}{r} 125 \\ -\ 50 \\ \hline 075 \end{array}$

Carolina determina o valor omisso através da estratégia de composição/decomposição. Todavia, este registo não permite saber se a composição/decomposição numérica é suportada por um raciocínio aditivo ou multiplicativo. Isto é, para obter os valores 100 quilómetros e 60 minutos respectivamente, a aluna pode ter efectuado: (i) as adições 50+50 e 30+30; ou (ii) as multiplicações 2x50 e 2x30. Depois pode ter decomposto os valores iniciais, construindo uma nova representação em colunas (canto superior direito). Os valores numéricos que Carolina escreve, na terceira linha da primeira representação tabular, parecem resultar da adição dos valores numéricos das segundas linhas das duas representações, isto é 125km=25km+100km e 75min=15min+60min. Célia e António responderam de forma semelhante a Carolina. Manuel responde incorrectamente apresentando a diferença entre distâncias como um valor correspondente ao tempo da viagem (valor omisso).

Resolução de problemas de comparação

Um problema de comparação proposto no teste de diagnóstico apresenta um contexto simples e os valores de uma das variáveis são múltiplos dos valores da outra variável. Os alunos respondem do modo indicado no Quadro 4.

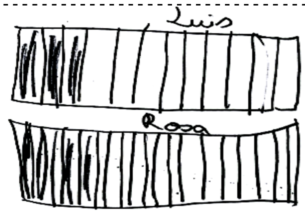
O Luís e a Rosa vão fazer leito com chocolate para o lanche dos irmãos e dos primos. Nas tabelas estão representadas as quantidades usadas pelos dois amigos.

Receita do Luís	
Leite (n.º de copos)	12
Chocolate em pó (colheres de sopa)	3

Receita da Rosa	
Leite (n.º de copos)	20
Chocolate em pó (colheres de sopa)	5

Em que receita o leite sabe mais a chocolate?

Quadro 4 – Resposta dos alunos ao problema 3 (teste diagnóstico)

Aluno	Resposta
Carolina	Receita do Luís - 3 : 12 = 0,25 → quantidade do chocolate em 1 copo. Receita da Rosa - 5 : 20 = 0,25 → quantidade do chocolate em 1 copo. R: O leite sabe a mesma coisa nas duas receitas.
Célia	 $\frac{12}{3} \neq \frac{20}{5}$ R: Sabe mais a chocolate o leite da Rosa
António	3×? = 12 ?= 4 3×4 = 12 5×4 = 20 R.: Nenhum, tinham todas o mesmo sabor.
Manuel	É na receita do Luís (porque leva menos ~~chocolate~~ leite, nº de copos) que o leite sabe mais a chocolate 20 − 5 = 15 12 − 3 = 09

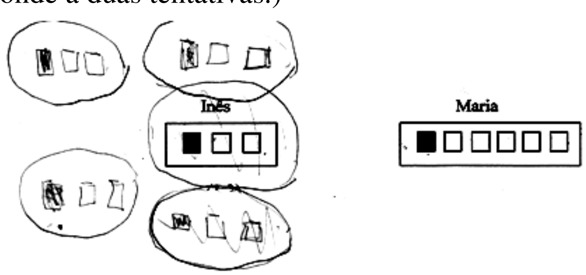
Carolina e António respondem correctamente. Carolina representa os dados na forma de razão – utilizando dois pontos como símbolo da divisão – e calcula a razão unitária. É uma estratégia funcional porque envolve a relação entre as variáveis, na qual revela compreender o significado do invariante (0,25), que ainda não reconhece como constante de proporcionalidade mas que lhe permite fazer um julgamento qualitativo sobre o sabor das misturas. António representa inicialmente parte dos dados numa equação (3x?=12). Depois envolve-se na exploração da relação entre a quantidade de chocolate e a quantidade de leite, parecendo ter determinado mentalmente o factor invariante (4) que lhe permite julgar o sabor da mistura. É uma estratégia funcional. Célia e Manuel respondem incorrectamente. Célia faz uma representação pictórica incorrecta da relação entre os dados, pois não se trata de uma relação parte:todo mas uma relação parte:parte. Depois faz uma representação, em fracção, que não corresponde à representação pictórica e é com base nesta que diz que a mistura da Rosa sabe mais a chocolate. Manuel estabelece uma relação por subtracção e não por razão entre a quantidade do leite e a quantidade de chocolate.

O problema seguinte apresenta uma mistura de líquidos, num contexto simples e envolvendo números pequenos. Os alunos respondem do modo indicado no Quadro 5.

Na aula de EVT, a Inês e a Maria juntaram tinta preta (quadrícula preta) com tinta branca (quadrícula branca) para preparar tinta cinzenta. Para cada situação diz qual das raparigas preparou a tinta cinzento mais escura.

a)

Quadro 5 – Resposta dos alunos ao problema 4 (entrevista)

Aluno	Resposta
Carolina	**Carolina:** É igual só há 1 de preto... (Faz o seguinte registo. Corresponde a duas tentativas.)  **Investigadora:** O que estás a fazer? **Carolina:** É... Estou a ver quanto é que tenho de pôr aqui [mistura da Inês].
Célia	**Célia:** É igual. **Investigadora:** O tom da tinta é igual? **Célia:** É... Ou não? Este [mistura da Maria] tem mais 1 [copo de] branco. Tem o mesmo de preto, é igual.

António	**António:** É este [mistura da Inês], Porque a tinta a Maria tem mais branco, é mais clara. **Investigadora:** E a tinta preta? **António:** É igual [nas duas misturas]. Só a [tinta] branca é que faz ficar mais clara.
Manuel	**Manuel:** Ah! Eu não sei... **Investigadora:** Mas podias fazer esta mistura em EVT? **Manuel:** Pois... (Aponta para a mistura da Maria) Este tem mais tinta? E... Tem o mesmo de preto... Mas qual é mais cinzento... Não faço a mínima!

António responde correctamente porque estabelece uma comparação entre as misturas relativamente às quantidades de tinta branca e de tinta preta, sendo que a mistura com tom mais escuro corresponde àquela com menor quantidade de tinta branca. Carolina e Célia respondem incorrectamente dizendo que o tom das misturas é igual, utilizando como argumento a existência da mesma quantidade de tinta preta, isto é, mobilizam apenas uma parte da informação. Porém, Carolina parece estar focada também na quantidade de tinta, pois com suas representações (mistura da Inês) pretende encontrar uma quantidade de tinta branca igual aquela que foi utilizada pela Maria. Manuel diz não saber qual das misturas é a mais escura e revela estar a pensar na quantidade total de tinta em vez da sua tonalidade.

Conclusões

Os resultados mostram que os alunos tendem a resolver correctamente problemas de valor omisso usando estratégias composição/decomposição que envolvem simultaneamente relações aditivas e multiplicativas. Há uma tendência para se envolver no cálculo de dobro dos valores iniciais e dos valores intermédios entretanto calculados tendendo uma aproximação ao valor pretendido, como mostram as resoluções do problema 2. Seguidamente, decompõem os valores iniciais na sua metade e determinam o valor omisso através da adição. Poder-se-ia pensar que esta estratégia envolve relações específicas que envolvem metades como a do problema 2 (duas vezes e meia). No entanto, esta estratégia também é usada quando estão presentes relações que envolvem números inteiros. É o que acontece com a resolução da Carolina no problema 1, em que a aluna usa valores de referência que a parece conhecer bem, obtidos através da multiplicação, sendo que o valor omisso é obtido através de uma adição.

Uma das dificuldades reveladas pelos alunos diz respeito à estratégia de composição/decomposição. Isso evidencia-se quando não é possível determinar o valor omisso fazendo a composição numérica através do dobro. De facto, Célia, no problema 1, não foi capaz de mobilizar outros conhecimentos para determinar o valor omisso. Outra dificuldade envolve não compreensão que a diferença entre os dados de uma variável não corresponde a um valor numérico de outra variável.

No que respeita aos problemas de comparação, os alunos apresentam um desempenho diferente, sendo que revelam grande dificuldade no problema que envolve o tom da cor. É provável que nunca tenham tido a oportunidade de pensar aprofundadamente sobre a situação, pelo que o foco da sua atenção sobre os dados é parcial, embora o contexto do problema seja simples e plausível de ser executado numa aula da EVT. No problema que envolve o sabor a chocolate os alunos tendem a usar uma estratégia funcional. A representação da relação entre dados das variáveis envolve a fracção e os dois pontos mas também recorre a colunas numéricas onde o aluno explora uma relação multiplicativa. Uma aluna revela ser capaz de explicar o significado da razão unitária que neste problema é constante.

As dificuldades identificadas dizem respeito ao tomar a relação parte:parte como relação parte:todo bem como em utilizar diferentes representações da relação parte:todo. Uma outra dificuldade diz respeito à não compreensão que se trata de uma relação multiplicativa, estabelecendo incorrectamente relações aditivas entre variáveis.

Tendo em consideração o Quadro 1 podemos dizer que alunos, antes do ensino formal da proporcionalidade directa, tendem a resolver problemas de valor omisso utilizando estratégias que não são exclusivamente multiplicativas (ou seja, proporcionais). Utilizam estratégias que envolvem em simultâneo a adição e a multiplicação, sendo possível identificar estratégias rudimentares que envolvem elementos pictóricos e contagem unitária. Relativamente aos problemas de comparação, os alunos são capazes de usar estratégias multiplicativas funcionais, no entanto a resposta correcta está dependente da compreensão do aluno sobre as representações, a natureza de relação entre variáveis e ainda do contexto descrito no problema.

Este conhecimento sobre processos matemáticos e as dificuldades dos alunos do 6.º ano de escolaridade na resolução problemas que envolvem uma relação de proporcionalidade directa, antes do ensino formal deste tópico, é fundamental para os professores ajudarem os alunos a desenvolver o seu raciocínio proporcional, capitalizando o conhecimento que estes já têm. Isto é, por um lado, os professores podem procurar desenvolver um trabalho no sentido de sofisticar estratégias usadas pelos alunos, como a estratégia de composição/decomposição pode evoluir para se tornar na estratégia multiplicativa escalar, reforçando a sua compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade. Por outro lado, conhecer as dificuldades ajudar a identificar os conceitos que não estão satisfatoriamente compreendidos e podem comprometer o desempenho dos alunos, dando sugestões para o trabalho individualizado a realizar com alguns alunos .

Referências

Abrantes, P.; Serrazina, L. & Oliveira, I, (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME.

Bowers, J., Nickerson, S., & Kenehan, G. (2002). Using technology to teach concepts of speed. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.) *Making sense of fractions, ratios and proportions* (pp. 176-187). Reston, VA: NCTM.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting research to Teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher,* 86(5), 404-407.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). *Learning and teaching ratio and proportion: Research implications*. http://education.umn.edu/rationalnumberproject/93_4.html

Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 321-336.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-17). Londres: Sage.

Hart, K., (1984) R*atio: Children's Strategies and Errors*, NFER-Nelson, UK

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal of Research in Science Teaching*, *26*(3), 205-220.

Karplus, R., Steven, P., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landan (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and processes*. Orlando; Academic Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118) Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ministério da Educação (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível *online*)

Post, T, Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings In *Algebraic concepts in the curriculum K-12* (1988 Yearbook). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stanley, D., McGowan, D., & Hull, S. H. (2003). Pitfalls of over-reliance on cross multiplication as a method to find missing values. *Texas Mathematics Teacher*, *11*, 9-11.

Steinthorsdottir, O. B. (2003). Making Meaning of Proportion: A Study of Girls in Two Icelandic Classrooms. Unpublished Ph.D, University of Wisconsin-Madison, Madison. (disponível *online*)

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174